Länge des Vorhangs (Bogenlänge)

Wie viel Gardine braucht der Mensch, wenn die Fensterfront von s Metern verhangen werden soll? Wie groß ist der prozentuale Aufschlag zu s ?

Wenn der Vorhang in Wellen fallen soll, ist ein prozentualer Aufschlag zur Fensterfront s nötig.

Beispiel

Nehmen wir an, der Vorhang verhält sich bei nicht zu großer Stauchung wie eine Sinusfunktion $f(x)=\sin(x)$, dann können wir die Bogenlänge für eine Periode, die 2π beträgt, ermitteln:

[http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=sin\(x\)&xmin=0&xmax=2*pi](http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=sin(x)&xmin=0&xmax=2*pi)

Bogenlänge (Kurvenintegral) von 0 bis 6.283185307179586:

$$L = 7.640395578055421$$

Wir schreiben $B(\sin(x), 0, 2\pi) = 7.640\dots$

Also 7,64 m Stoff bei einer Fensterfront von $2\pi = 6,28$ m Länge macht **22%** Aufschlag.

Bemerkung:

Das Kurvenintegral ist schwierig zu berechnen. Nach der Formel

$$B(f(x), a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ ist } B(\sin(x), 0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx . \text{ Dieses elliptische}$$

Integral können wir zur Kontrolle vom Programm numerisch berechnen lassen mit demselben Ergebnis (Diesmal: Integral von...):

[http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=sqrt\(1+cos^2\(x\)\)&xmin=0&xmax=2*pi](http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=sqrt(1+cos^2(x))&xmin=0&xmax=2*pi)

Zur Praxis...

Meist fällt der Vorhang wuchtiger, so dass sich die Funktion streckt auf $f(x)=2\sin(x)$.

Die Bogenlänge beträgt jetzt $B(2\sin(x), 0, 2\pi) = 10.541\dots$ und der Aufschlag **68%**.

Bei 1 m Fensterfront benötigt man demnach 1,68 m Stoff. Das kommt bei Gardinen schon eher hin.

Das legt den Gedanken nahe dass bei $f(x)=3/2\sin(x)$ der Aufschlag etwa im Durchschnitt beider Werte liegt. Wir errechnen $8.986713342514896/(2\pi) = 1.430\dots$, also **43%** Aufschlag.

Damit hätten wir eine **Faustformel**:

$$f(x)=A\sin(x) \text{ benötigt einen Aufschlag von mindestens } (2\cdot A-1)\cdot 22\%, \quad (1 \leq A \leq 2,5)$$

Nun lautet die **allgemeine Sinusfunktion** aber $f(x)=a\sin(bx)$. Wie geht man dabei mit der Faustformel um?

Antwort: Ganz locker und gelassen, wie die folgenden Überlegungen zeigen:

die Funktion $\sin(bx)$ mit der Periode $p = 2\pi/b$ wird durch Ähnlichkeitsabbildung gestreckt auf $b\sin(x)$ mit der Periode 2π . Das b -fache der Länge x bedeutet dann das b -fache der Bogenlänge und es gilt für die Bogenlänge

$$B(\sin(bx), 0, p) = B(b\sin(x), 0, 2\pi) \cdot 1/b \quad (1)$$

Beweis:

$$B(\sin(bx), 0, p) = \int_0^p \sqrt{1 + b^2 \cos^2(bx)} \, dx = \frac{1}{b} \int_0^{b \cdot p} \sqrt{1 + b^2 \cos^2(z)} \, dz = \frac{1}{b} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + b^2 \cos^2(z)} \, dz$$

mit $z := bx$, $dx = 1/b \cdot dz \Rightarrow$

$$B(\sin(bx), 0, p) = \frac{1}{b} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + b^2 \cos^2(x)} \, dx = B(b \cdot \sin(x), 0, 2\pi) \cdot \frac{1}{b} \quad \blacksquare$$

Gleichung (1) lässt sich schreiben als

$$B(\sin(bx), 0, p) = B(b \cdot \sin(x), 0, b \cdot p) \cdot 1/b \quad (1a)$$

Da auf der rechten Seite b Perioden durch b geteilt werden, können wir vereinfachen:

$$B(\sin(bx), 0, p) = B(b \cdot \sin(x), 0, p), \quad p = 2\pi/b \quad (2)$$

Wir können also das b einfach vor die Funktion schieben, ohne dass sich die Bogenlänge ändert.

Wir testen das zunächst mit $b = 7$: $B(1/7 \cdot \sin(7x), 0, 2\pi) = B(\sin(x), 0, 2\pi) = L$ (s.o.) ok
[http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=1/7*sin\(7x\)&xmin=0&xmax=2*pi](http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=1/7*sin(7x)&xmin=0&xmax=2*pi)

Praktische Handhabung

Enthält der Bogen auch unvollendete Perioden, stimmt (2) dennoch in guter Näherung, wenn die Sinusfunktion über mindestens eine Periode integriert wird.

$B(a \cdot \sin(bx), 0, p) \approx B(a \cdot b \cdot \sin(x), 0, p)$, mit $b = 2\pi/p$

$$B(a \cdot \sin(2\pi/p \cdot x), 0, p) \approx B(a \cdot 2\pi/p \cdot \sin(x), 0, p), \quad a \cdot 2\pi/p \geq 1 \quad (3)$$

Auf der linken Seite wird über eine Periode p integriert. Strecken bzw. stauchen wir die Funktion auf der rechten Seite, deren Periode 2π beträgt, um $A = a \cdot 2\pi/p$, so beträgt deren Periode $2\pi/A = p/a$. Damit über mindestens eine Periode integriert wird muss gelten $p/a \leq 2\pi$, $a/p \cdot 2\pi = A \geq 1$.

Beispiel:

Gemessen wurde von mir (π -Daumen) die Amplitude mit $a = 6$ cm, die Periode $p = 19$ cm.

$A = a \cdot 2\pi/p = 1,98 \approx 2$ und somit **etwa 68% Aufschlag** (s.o.)

nach "genauer" **Faustformel**: $(2 \cdot 1,98 - 1) \cdot 22\% = 65\%$.

"exakt":

$$B(6 \cdot \sin(2\pi/19 \cdot x), 0, 19) = 31.719067870517357$$

$$31.719067870517357/19 = 1.6694\dots, \text{ also } 67\% \text{ Aufschlag.}$$

Nach (3):

$$B(12 \cdot \pi/19 \cdot \sin(x), 0, 19) = 31.801183048264168$$

$$31.801183048264168/19 = 1.6737\dots \text{ mit nur } 0,4\% \text{ Unterschied.}$$

Fazit:

Zuzüglich Saumen... sind Sie mit 170% der Fensterfront auf der sicheren Seite oder Länge, vor einer zu ernsten Anwendung dieser mathematischen Lösung möchte ich dennoch ausdrücklich warnen ;-)